Arbeitsblatt zum Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Schauen wir uns zuerst die Funktionen an, deren Integrale wir bereits mit der Streifenmethode berechnet haben:

Fkt.-Term	**Integral**	**Grenzen**	**Fkt.-Term**	**Integral**	**Grenzen**
c	$c \cdot b$	0 bis b	x^3	$\frac{1}{4} \cdot b^4 - \frac{1}{4} \cdot a^4$	a bis b
$3 \cdot x$	$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2$	0 bis b	x^2		a bis b
x^2	$\frac{1}{3} \cdot b^3$	0 bis b	x		a bis b
$c \cdot x^2 + d \cdot x$	$c \cdot \frac{1}{3} \cdot b^3 + d \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2$	0 bis b	c		a bis b
x^3	$\frac{1}{4} \cdot b^4$	0 bis b	$x^2 - 4$	$1\frac{2}{3}$	-1 bis -2

Vermutung 1: Das Integral auf dem Intervall [a;b] einer natürlichen Potenzfunktion der Form $f(x) = x^m$ läßt sich durch die folgende allgemeine Integrationsformel errechnen:

$$\int_a^b x^m dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Wir wollen diesen Zusammenhang in zwei Schritten etwas näher untersuchen, indem wir diese Formel zur Stammfunktion von $f(x) = x^m$ in Beziehung setzen. Erinnere Dich dabei an die Definition einer Stammfunktion: Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist eine Funktion $F(x)$, für die die Beziehung gilt: $F'(x) = f(x)$.

1. Berechne zuerst die Stammfunktion zur natürlichen Potenzfunktion $f(x) = x^m$:

   $F(x) =$ __________________ und es gilt $F'(x) =$ __________________ $= f(x)$.

2. Formuliere nun erneut die Vermutung 1, indem Du jedoch statt der natürlichen Potenzfunktion den Begriff Stammfunktion verwendest: Das Integral einer natürlichen Potenzfunktion läßt sich durch die zwei Berechnungsschritte ermitteln:

   1. ____

   2. ____

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die
Vermutung 2: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so läßt sich das Integral von $f(x)$ auf dem Intervall [a;b] durch die folgende Formel errechnen:

$$\int_a^b f(x)dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Wie wir sehen, hat das Flächenproblem – deshalb haben wir überhaupt den Begriff des Integrals entwickelt – sehr viel mit dem Tangentenproblem zu tun, da zur Berechnung des Integrals im wesentlichen eine Funktion F gesucht ist, deren Ableitung gerade mir der Ausgangsfunktion f übereinstimmt.

ARBEITSBLATT ZUM HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL UND INTEGRALRECHNUNG

Wenn die zuvor aufgestellte Vermutung wahr sein sollte, so würde die Integralrechnung um ein vielfaches vereinfacht werden. Berechne zur Veranschaulichung die Aufgabe 8d) der Hausaufgabe nach der neuen Methode:

$\int_0^3 (x^2 - 4)dx =$ ________________________________ = ______________________ = _____

Es scheint, daß unsere Vermutung richtig ist. Dennoch wollen wir sie nun beweisen.

Es sei $f(x)$ eine im Intervall [a;b] integrierbare Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, d. h. $F'(x) = f(x)$ für alle x im Intervall [a;b]. Wir betrachten nun eine Zerlegung des Intervalls in Streifen an den Stellen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x ,$$

wenn Δx hinreichend klein ist. Außerdem läßt sich $f(x) = F'(x)$ beliebig genau durch den zugehörigen Differenzenquotienten approximieren:

$$f(x_k) = F'(x_k) \approx \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{\Delta x}$$

oder anders ausgedrückt:

$$f(x_k) \cdot \Delta x = F'(x_k) \cdot \Delta x \approx F(x_{k+1}) - F(x_k) .$$

Versuche nun aus diesen Überlegungen heraus zu folgern, daß $\int_a^b f(x)dx \approx F(b) - F(a)$ ist:

$\int_a^b f(x)dx \approx$ ______________________________________

$=$ ______________________________________

$\approx$ ______________________________________

$=$ ______________________________________

$=$ ______________________________________

$= F(b) - F(a)$

Perfekt. Zwar haben wir nun eigentlich nur gezeigt, daß das Integral der Funktion $f(x)$ nur annähernd gleich ($\approx$) der Stammfunktionsdifferenz $F(b) - F(a)$ ist, jedoch ist klar, daß die Annäherung immer besser wird, je feiner wir das Intervall [a;b] in Teilintervalle $[x_k ; x_{k+1}]$ zerlegen, bis schließlich statt dem annähernd gleich ein gleich behauptet werden darf. Fassen wir das ganze noch einmal in einem (wichtigen) Satz zusammen:

> ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung***
>
> Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall [a;b] integrierbare Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, d. h. $F'(x) = f(x)$, so gilt:
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$