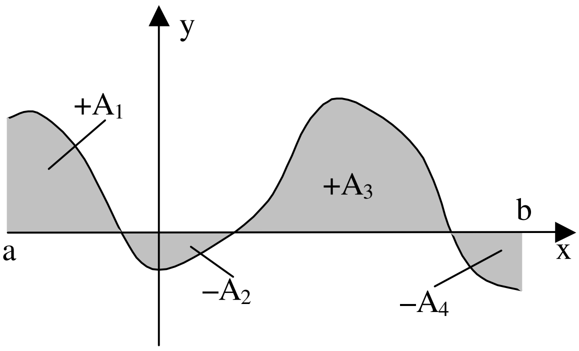
ARBEITSBLATT ZUR DEFINITION DES INTEGRALS

Zur Berechnung des Flächeninhalts $A_{[a;b]}$ unter dem Graphen einer Funktion wurde bisher wie folgt vorgegangen:

- Zerlege das Intervall $[a;b]$ in n Teilintervalle mit Zwischenpunkten $x_0, x_1, ..., x_n$.
- Berechne zu jedem Zwischenpunkt den zugehörigen Funktionswert $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})$.
- Berechne die Untersumme: $\underline{S}_n = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x$
- Berechne die Obersumme: $\overline{S}_n = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x$
- Die Grenzwerte der Ober- und Untersumme sind gleich dem gesuchten Flächeninhalt: $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}_n = A_{[a;b]}$

Da die betrachteten Graphen stets oberhalb der x-Achse verliefen, erhielten wir immer positive Flächeninhalte. Was passiert allerdings, wenn der Graph unterhalb der x-Achse verläuft? Die Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})$ werden negativ, also werden auch die Unter- und Obersumme negativ, also auch der berechnete Flächeninhalt.
Man erhält sogenannte *orientierte Flächeninhalte*. Die Summe dieser orientierten Flächeninhalte nennt man das Integral einer Funktion:



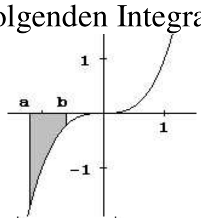
DEFINITION DES INTEGRALS

Sei f eine Funktion, welche auf dem Intervall $[a;b]$ definiert ist.
Unter dem **Integral von a bis b der Funktion f** versteht man die Summe der orientierten Flächeninhalte der Teilflächen unter dem Graphen von f:

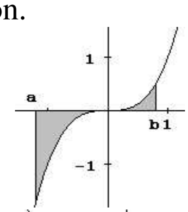
$$\int_a^b f(x)dx = (+A_1 - A_2 + A_3 - A_4)$$

Aufgabe 1: Bestimme die folgenden Integrale mithilfe der obigen Definition.

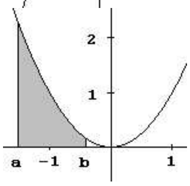
a) $\int_a^b x^3 dx$ für $a < b \le 0$.



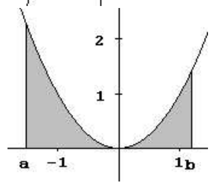
b) $\int_a^b x^3 dx$ für $a < 0 < b$.



c) $\int_a^b x^2 dx$ für $a < b \le 0$.



d) $\int_a^b x^2 dx$ für $a < 0 < b$.



Aufgabe 2: Begründe mithilfe der Definition: $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ für alle $a < b$.

Hinweis: Für den Fall $0 \le a < b$ haben wir dies bereits mithilfe der Ober- und Untersumme gezeigt. Zu zeigen bleiben jetzt lediglich die Fälle $a < b \le 0$ und $a < 0 < b$. (vgl. auch Aufgabe 1)