Lesen Sie sich die Aufgabenstellungen genau durch und klären Sie Verständnisfragen in den ersten 10 Minuten. Die Aufgaben sind **nicht** nach einem Schwierigkeitsgrad geordnet.

Aufgabe 1: Analysis – *e*-Funktion

Gegeben ist die Funktionsschar f_a durch $f_a(x) = \frac{x+a}{e^x}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Führen Sie eine Untersuchung der Funktionsschar in folgenden Schritten durch:

a.1) Geben Sie den Definitionsbereich, das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

a.2) Untersuchen Sie die Funktionsschar auf das Vorhandensein lokaler Extrema.

a.3) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a den Wendepunkt von f_a.

a.4) Skizzieren Sie den Graphen von f_0 und f_2 im Intervall $-3 \le x \le 4$.

b) Die lokalen Extrempunkte P_E der Schar (Zwischenergebnis: $P_E(1-a \mid e^{a-1})$ liegen auf einer Kurve.

b.1) Berechnen Sie die Gleichung dieser Kurve.

b.2) Zeichnen Sie die Kurve in das unter Teilaufgabe **a** angelegte Koordinatensystem.

c) Gegeben ist die Funktion F_a mit $F_a(x) = (x+a+1)e^{-x}$.

c.1) Weisen Sie nach, dass F_a eine Stammfunktion von f_a ist.

c.2) Die x-Achse und der Graph der Funktion f_a begrenzen für $a > 0$ im 4. Quadranten eine Fläche vollständig. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a.

d) Die Gerade t_a sei Tangente an den Graphen der Funktion f_a im Punkt $A(0 \mid f_a(0))$.

d.1) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden t_a.

d.2) Zeigen Sie, dass alle Geraden t_a einen gemeinsamen Punkt haben.

Aufgabe 2: Analysis – *ln*-Funktion

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{5 - 5\ln(5x)}{x}$.

a) Führen Sie eine vollständige Untersuchung der Funktion in folgenden Punkten durch:

a.1) Geben Sie den Definitionsbereich, das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, die Symmetrieeigenschaften des Graphen sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

a.2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die erste und zweite Ableitung der Funktion f wie folgt lauten:

$$f'(x) = \frac{5 \cdot \ln(5x) - 10}{x^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{25 - 10 \cdot \ln(5x)}{x^3}$$

a.3) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes sowie die des Wendepunktes.

a.4) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-1 \le x \le 10$.

b) Von $(0 \mid 0)$ aus wird eine Tangente t an den Graphen von f gelegt.

b.1) Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes.

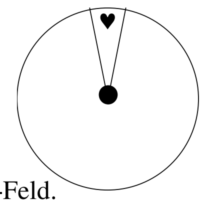
b.2) Entwickeln Sie daraus die Funktionsgleichung der Tangente t.

→ ***Bitte wenden*** →

Aufgabe 3: Stochastik

Auf dem Jahrmarkt steht ein Trödler mit einem „verdeckten Glücksrad", d. h. von dem Glücksrad ist immer nur das gedrehte Feld sichtbar, die restlichen Felder sind verborgen. Auf einem Schild am Stand ist folgende Information zu lesen:

Versuchen Sie Ihr Glück: ♣ gewinnt 1,– €,
♦ gewinnt 2,– €,
♠ gewinnt 5,– € und
♥ gewinnt 10,– € bei nur 2,50 € Einsatz.



Kleingedrucktes: Auf dem Rad sind 10 ♣-Felder, 3 ♦-Felder, 2 ♠-Felder und 1 ♥-Feld.

a) Betrachten Sie die Zufallsgröße X: *Reingewinn in €.*

- **a.1)** Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung tabellarisch dar.
- **a.2)** Berechnen Sie den Erwartungswert E(X). Ist das Spiel fair?

b) Sie fordern Ihr Glück heraus und wollen 400 Spiele an dem Glücksrad machen. Dabei interessiert Sie nur der Hauptgewinn (♥), d. h. Sie betrachten die Zufallsgröße X: *Anzahl der Hauptgewinne*.

- **b.1)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Sie genau 27 Hauptgewinne erzielen?
- **b.2)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Hauptgewinn-Anzahl im Bereich $22 \leq X \leq 28$ liegen?
- **b.3)** Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ergebnis $X > 23$?

c) Die Anzahl der Hauptgewinne ist sehr klein. Um einen besseren Überblick über die Gewinnverteilung zu bekommen, betrachten wir jetzt die Anzahl der ♣-Gewinne, d. h. die Zufallsgröße X: *Anzahl der 1,– €-Gewinne*. Die Versuchsanzahl sei weiterhin $n = 400$.

- **c.1)** Berechnen Sie die 90%-Umgebung um den Erwartungswert.
- **c.2)** In welchem Bereich werden die Ergebnisse der Zufallsgröße X mit 75%iger Wahrscheinlichkeit liegen?
- **c.3)** Nach 400 Spielen stellen Sie fest, dass Sie insgesamt 275 ♣-Gewinne erzielt haben. Charakterisieren Sie dieses Ergebnis auf dem 95%-Signifikanzniveau.

d) Das Ergebnis aus Teilaufgabe c.3 lässt uns daran zweifeln, dass die vom Trödler angegebenen Wahrscheinlichkeiten korrekt sind. Wir haben die Vermutung, dass $P(\clubsuit) > \frac{10}{16}$.

- **d.1)** Geben Sie eine Entscheidungsregel an: Bei wie vielen ♣-Gewinnen kann man davon ausgehen, dass $P(\clubsuit) > \frac{10}{16}$ ist? (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$)
- **d.2)** Der Trödler hat uns tatsächlich übers Ohr gehauen und uns die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $P(\clubsuit) = \frac{11}{16}$ verschwiegen. Geben Sie in diesem Fall die Irrtumswahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art an, d. h. die Hypothese $P(\clubsuit) = \frac{10}{16}$ wird nicht verworfen, obwohl sie definitiv falsch ist.

Viel Erfolg!

Lösungen:

Aufgabe 1: Analysis – *e*-Funktion

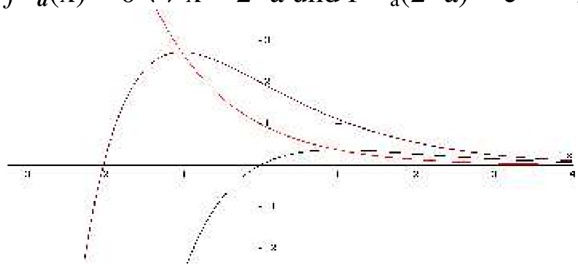
Gegeben ist die Funktionsschar f_a durch $f_a(x) = \dfrac{x+a}{e^x}$, a ∈ IR.

a) Führen Sie eine Untersuchung der Funktionsschar in folgenden Schritten durch:

a.1) ID = IR, $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$; $P_1(0 \mid a)$, $N_1(-a \mid 0)$.

a.2) $f'_a(x) = -(x+a-1)e^{-x}$; $f''_a(x) = (x+a-2)e^{-x}$. $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1-a$ und $f''_a(1-a) = -e^{a-1} < 0 \Rightarrow P_E(1-a \mid e^{a-1})$.

a.3) $f''_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2-a$ und $f'''_a(2-a) = e^{a-2} \Rightarrow P_W(2-a \mid 2e^{a-2})$.

a.4) 

b) Die lokalen Extrempunkte P_E der Schar liegen auf einer Kurve.

b.1) Die Kurve lautet: $y = e^x$.

b.2) Siehe oben.

c) Gegeben ist die Funktion F_a mit $F_a(x) = (x+a+1)e^{-x}$.

c.1) Klar durch Ableitung!

c.2) $\int_{-a}^{0} f_a(x)dx = e^a - a - 1$

d) Die Gerade t_a sei Tangente an den Graphen der Funktion f_a im Punkt $A(0 \mid f_a(0))$.

d.1) t läuft durch $A(0 \mid a)$ mit der Steigung $m = f'_a(0) = 1-a$. Daraus folgt:
t_a: $y = (1-a)x + a$.

d.2) $t_a = t_b \Leftrightarrow (1-a)x + a = (1-b)x + b \Leftrightarrow -ax+a = -bx+b \Leftrightarrow (a-b)x = (a-b) \Leftrightarrow x = 1$
Alle Geraden t_a schneiden sich in $(1 \mid 1)$.

Aufgabe 2: Analysis – *ln*-Funktion

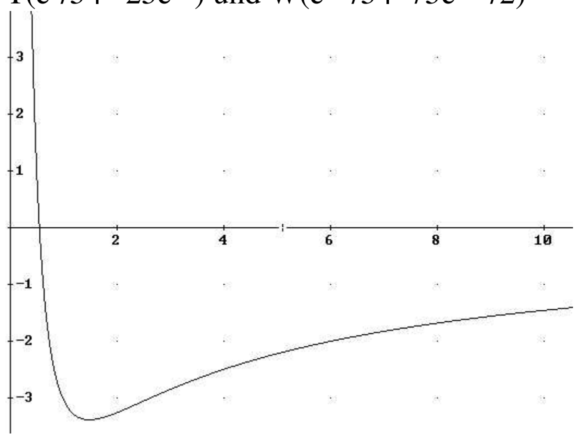
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \dfrac{5-5\ln(5x)}{x}$.

a) Führen Sie eine vollständige Untersuchung der Funktion in folgenden Punkten durch:

a.1) ID = IR^+, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Keine Symmetrie, $N_1(0 \mid e/5)$.

a.2) Quotientenregel und Kettenregel, bei 2. Ableitung mit x kürzen.

a.3) $T(e^2/5 \mid -25e^{-2})$ und $W(e^{5/2}/5 \mid -75e^{-5/2}/2)$

a.4) 

b) Von (0 | 0) aus wird eine Tangente *t* an den Graphen von *f* gelegt.

b.1) $m = f'(x_p) \Rightarrow f(x_p) = mx_p \Rightarrow f(x_p) = f'(x_p)x_p \Rightarrow x_p = e^{3/2}/5 \Rightarrow B(e^{3/2}/5 \mid -25e^{-3/2}/2)$

b.2) t: $y = -125e^{-3}/2 * x$

Aufgabe 3: Stochastik

a) Betrachten Wir die Zufallsgröße X: *Reingewinn in €.*

a.1)

–1,50 €	–0,50 €	+2,50 €	+7,50 €
$^{10}/_{16}$	$^{3}/_{16}$	$^{2}/_{16}$	$^{1}/_{16}$

a.2) E(X) = -0,25 €, d. h. das Spiel ist nicht fair.

b) Betrachten wir Zufallsgröße X: *Anzahl der Hauptgewinne*. $n = 400$, $p = {}^{1}/_{16}$.

b.1) $P(X=27) = 7{,}3\%$

b.2) $\sigma = 4{,}84$, $\mu = 25$, $r = 3{,}5 = 0{,}72\sigma \Rightarrow P(22 \le X \le 28) = 52{,}9\%$

b.3) $\sigma = 4{,}84$, $\mu = 25$, $r = 1{,}5 = 0{,}72\sigma \Rightarrow P(X > 23) = 1-P(X \le 23) = 1-0{,}382 = 61{,}8\%$

c) Betrachten wir Zufallsgröße X: *Anzahl der ♣-Gewinne*. $n = 400$, $p = {}^{10}/_{16}$.

c.1) $\sigma = 9{,}68$, $\mu = 250$, $r = 1{,}64\sigma = 15{,}87 \Rightarrow P(235 \le X \le 265) \approx 90\%$

c.2) $\sigma = 9{,}68$, $\mu = 250$, $r = 1{,}03\sigma = 9{,}97 \Rightarrow P(241 \le X \le 259) \approx 70\%$

c.3) $\sigma = 9{,}68$, $\mu = 250$, $r = 1{,}96\sigma = 18{,}97 \Rightarrow P(232 \le X \le 268) \approx 95\%$, d. h. das Ergebnis ist signifikant abweichend, da es zu hoch ausgefallen ist.

d) Vermutung: $P(♣) > \frac{10}{16}$. Testen also H_0: $P(♣) \le \frac{10}{16}$ mit

d.1) Einseitiger Test ⇒ 90%-Intervall gibt rechte Grenze an. Daher ist die Entscheidungsregel: *Verwirf die Hypothese H_0 bei X > 265; ansonsten gehe von der Richtigkeit der Hypothese aus.*

d.2) Es gilt $P(♣) = \frac{11}{16}$. Zu berechnen: $P_{11/16}(X \le 265)$.

$\sigma = 9{,}27$, $\mu = 275$, $r = 9{,}5 = 1{,}02\sigma \Rightarrow P_{11/16}(X \le 265) = (1-P_{11/16}(266 \le X \le 284))/2 = (1-0{,}692)/2 = 15{,}4\%$

Der Fehler zweiter Art hat eine Wahrscheinlichkeit von 15,4%.