Gymnasium Odenthal

3. Klausur 12 MG, Schuljahr 2008/2009
Mathematik als Grundkursfach

***Arbeitszeit*:**	135 Minuten
***Lernbereich* :**	Analytische Geometrie
Thema:	Geraden / Lage von Geraden

Viel Erfolg

Name: ______________________ *Datum:* *04. März 2009*

Anzahl der abgegebenen Bögen (ohne Aufgabenblatt): |

Bewertungseinheiten (BE): von

Zensurenpunkte: Datum: Unterschrift:

HINWEIS: Der Lösungsweg ist ausführlich darzulegen.

Aufgabe I:

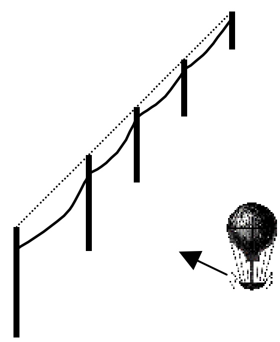
Gegeben seien die Geraden

$$g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lage der Geraden g, h und k zueinander!

Aufgabe II:

Ein 15 m hoher Heißluftballon wird nur vom Wind bewegt. Seine Startposition (unterster Punkt der Gondel) wird in einem rechtwinkligen Koordinatensystem [1 LE = 1 m] durch den Punkt $Q_0(21|59|0)$ beschrieben, wobei die Erdoberfläche in dem betrachteten Bereich als xy-Ebene anzusehen ist.



Der Ballon fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

[Angaben je Achse in $^{m}/_{s}$]

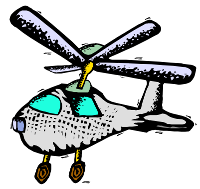
1 Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Heißluftballons!

2 Bestimmen Sie den Ort Q_1, an dem sich der Heißluftballon nach 10 Sekunden befindet! Bestimmen Sie die Zeit, die vergeht, bis sich der Ballon im Punkt $Q_2(-13|-9|68)$ befindet!

3 Eine geradlinige Stromleitung verläuft durch die Punkte A(50|0|10) und B(0|30|60). Zeigen Sie, dass der Heißluftballon **unterhalb** der Stromleitung hindurch fliegt!

4 Sonnenlicht fällt aus Richtung des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf den Ballon, als er sich im Punkt $Q_3(-19|-21|80)$ befindet. Bestimmen Sie die Länge des Schattens auf der Erdoberfläche (Bildstrecke „unterster Punkt der Gondel→oberster Punkt des Ballons")!

Aufgabe III:



Ein Hubschrauber H_1 einer Hubschrauberstaffel sucht mit einer Spezialkamera nach der Blackbox eines verunglückten Flugzeugs. Zum Zeitpunkt t_0 befindet sich der Hubschrauber im Punkt P(17|9|3). Zum Zeitpunkt t_1 (nach 20 Sekunden) lautet die Position des Hubschraubers Q(9|17|7). Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht dabei 100 m in der Realität.

1 Der Hubschrauber fliegt geradlinig vom Punkt P zum Punkt Q.
Bestimmen Sie die Kursgerade des Hubschraubers und dessen Geschwindigkeit!

2 Zum Zeitpunkt t_0 ermittelt der Pilot die Blackbox in der Richtung $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$, zum Zeitpunkt t_1 peilt er sie in der Richtung $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ an.

Bestimmen Sie die Tiefe, in der die Blackbox liegt. Die Wasseroberfläche entspricht der x-y-Ebene!

3 Ein zweiter Hubschrauber H_2 der gleichen Staffel befindet sich zum Zeitpunkt t_0 im Punkt R(10|25|5) und empfängt ein Signal aus der Richtung $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Begründen oder widerlegen Sie, dass beide Hubschrauber die gleiche Blackbox geortet haben!

4 Der Hubschrauber H_2 fliegt **pro Minute** mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -22{,}5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Hubschraubers H_2.
Zeigen Sie, dass sich die Flugrouten beider Hubschrauber kreuzen, dass die Hubschrauber allerdings nicht kollidieren!

5 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die beiden Hubschrauber den geringsten Abstand voneinander haben.
Berechnen Sie diesen minimalen Abstand!

Aufgabe I

1 Das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ besitzt keine Lösung, also sind g und h nicht parallel.

Das Gleichungssystem $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ besitzt die Lösung λ = 0,5 und μ = –0,5. Der Schnittpunkt lautet S(4|–1|2).

2 Der Stützvektor beider Geraden lautet $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, also ist der Punkt T(5|1|–3) gemeinsamer Punkt. Das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ besitzt keine Lösung, also sind h und k nicht identisch.

3 Das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ besitzt die Lösung r = –2, also sind g und h parallel.

Das Gleichungssystem $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ besitzt keine Lösung Die Geraden g und k sind deshalb echt parallel zueinander.

Aufgabe II

1 $v = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6\,{}^{m}/_{s}$

2 $\overrightarrow{OQ_1} = \begin{pmatrix} 21 \\ 59 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 40 \end{pmatrix}$, also Q_1(1|19|40)

$\overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 59 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 17$, also nach 17 s.

3 Stromleitung: $s: x = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Gleichsetzen liefert Gleichungssystem $\begin{matrix} 29 = -2t + 50\lambda \\ -59 = -4t - 30\lambda \\ 10 = 4t - 50\lambda \end{matrix}$ und führt zur Lösung t = 8 und λ = 0,9.

Beim Durchfliegen der Stromleitung ist der Heißluftballon auf Position Q_3(5|27|32), die Stromleitung ist bei S(5|27|55).

32m + 15m < 55 m, also fliegt der Ballon unter der Stromleitung hindurch.

4 $k1: x = \begin{pmatrix} -19 \\ -21 \\ 80 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu λ = –16, y = –37 und x = –19

$k2: x = \begin{pmatrix} -19 \\ -21 \\ 95 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ führt zu λ = –19, y = –40 und x = –19

Der Schatten wird also begrenzt durch S_1(–19|–37|0) und S_2(–19|–40|0). Die Länge des Schattens beträgt also 3 m.

Aufgabe III

1 Kursvektor $\overrightarrow{u_{20\sec}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, Kursgerade: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$. Geschwindigkeit:

$u = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot 12 = 36$, also 3,6 $^{km}/_{min}$ = 216 $^{km}/_{h}$

2 Peilgeraden: $h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$h_1 = h_2$ liefert λ = 8 und μ = 4, also befindet sich die Blackbox in S(–15|21|–5), also 500 m unter Wasser.

3 Peilgerade: $h_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$. Prüfen, ob S auf h_3 liegt: GLS nicht lösbar.

4 Kursvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -22{,}5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ pro min, also $v = |\vec{v}| = \sqrt{731{,}25} = 27{,}04$, also 2,7 $^{km}/_{min}$ = 162,25 $^{km}/_{h}$.

Kursvektor des ersten Hubschraubers pro min: $\vec{u} = \overrightarrow{u_{20\sec}} \cdot 3 = \begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$

Beide Kurse schneiden sich, denn:
$\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22{,}5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$ liefert s = $^2/_3$ und t = 0,4, also Schnittpunkt T(1|25|11). Sie kollidieren aber nicht, weil Hubschrauber 1 nach 40 s und Hubschrauber 2 nach 24 s den Punkt T passieren.

5

$$d^2(t) = \left\| \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22{,}5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} \right] \right\|$$

$= (7 - 1{,}5t)^2 + (-16 + 24t)^2 + (-2 - 3t)^2$

$= 587{,}25t^2 - 777t + 309$

Minimum bei t = 0,662, also nach 0,662 min ≅ 40 sec.

Der minimale Abstand beträgt dann $\sqrt{d^2(0{,}662) = 7{,}21}$, also 720 m.