

Gymnasium Odenthal

Garmann, Daniel

Roggenacker 23
51467 Bergisch Gladbach
Tel. (0 22 02) 96 45 93

Odenthal, 16.03.2006

Bewerbung um eine Beförderungsstelle A14 am Gymnasium Odenthal

Schriftlicher Entwurf für die Unterrichtsprobe im Fach

MATHEMATIK

Datum: 17.03.2006
Uhrzeit: 4. Stunde (10⁵⁵ Uhr – 11⁴⁰ Uhr)
Klasse/Kurs: Klasse 5 b
Raum: 816

Thema der Stunde: Geometrische Grundkörper – Der EULERSCHE POLYEDERSATZ

Thema der Reihe: Geometrie im Raum

Das zentrale Stundenziel:

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Form der geometrischen Grundkörper und deren Begrenzungsflächen beschreiben und benennen können. Sie sollen den numerischen Zusammenhang zwischen Ecken-, Kanten- und Flächenanzahl an bekannten Grundkörpern entdecken und analysieren können sowie den Sachverhalt an unbekanntem Körpern verifizieren können.

Beschreibung der Lerngruppe:

Die 29 Schülerinnen und Schüler der Klasse 5 b werden von mir von Beginn an im Fach Mathematik unterrichtet. In dieser Zeit habe ich Gelegenheit gehabt, die Schülerinnen und Schüler in allen Aktions- und Sozialformen im Unterrichtsgeschehen beobachten zu können. Dabei konnte ich feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler dieser Klasse besonders in Partnerarbeitsphasen gute Ergebnisse erzielen. Dies veranlasst mich in dieser Stunde, den Schwerpunkt der Erarbeitung ebenfalls in Partnerarbeit durchführen zu lassen.

Allgemein kann man gerade in den unteren Klassen eine große Motivation und Lernfreude im Fachunterricht Mathematik feststellen. Diese Beobachtung trifft im besonderen Maße auf diese Klasse zu. Über $\frac{3}{4}$ der Schülerinnen und Schüler haben beispielsweise an den Mathematikwettbewerben "Mathematikolympiade" und "Känguru-Wettbewerb" (letzteren im übrigen gerade erst gestern) teilgenommen. Dieser Bereitschaft, sich auch auf abstraktere mathematische Sachverhalte einzulassen, trage ich in der heutigen Stunde besonders Rechnung, indem der EULERSCHER POLYEDERSATZ thematisiert wird.

Einordnung in den Reihenkontext:

Die Schülerinnen und Schüler haben sich in den letzten zwei Wochen mit der Geometrie in der Ebene (Geraden, Winkel, Symmetrie) beschäftigt. Die Analyse der Geometrie im Raum wurde in der letzten Stunde mit der Einführung in die geometrischen Grundkörper begonnen. Dazu haben die Schülerinnen und Schüler verschiedene geometrische Formen aus ihrem täglichen Leben im Unterricht vorgestellt und klassifiziert. Zu jeder Klasse von geometrischen Körpern wurde ein idealisierter Stellvertreter vorgestellt und mathematisch definiert. Die letzte Stunde schloss mit der Hausaufgabe, fünf dieser geometrischen Grundkörper aus Papier zu basteln¹. Dies dient der Vorbereitung dieser Stunde, da die Schülerinnen und Schüler heute die Geometrie spezieller Grundkörper exakt untersuchen müssen. Dafür ist es unbedingt nötig, dass die Schüler die zu untersuchenden Körper anfassen und von allen Seiten betrachten können.

Die heutige Stunde bereitet allerdings auch auf die folgenden Stunden vor, in der das Augenmerk auf die Form der Flächen gelegt wird, von denen die Grundkörper eingeschlossen werden. Die Schülerinnen und Schüler werden in den folgenden Stunden Abwicklungen und Net-

¹ Siehe Bastelbogen in der Anlage

ze der Körper analysieren und herstellen sowie Schrägbilder der Körper zeichnen. Hierfür ist ein Verständnis für die Form der Begrenzungsflächen der Körper unerlässlich.

Didaktischer Kommentar:

Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist ein zentraler Bestandteil des Lehrplans Mathematik für die Sekundarstufe I. »Das Erfassen, Beschreiben und Vorstellen von Körper- und Körpernetzeigenschaften sowie das Begründen vermuteter Zusammenhänge machen einen ständigen Wechsel der Denkkumgebung zwischen Ebene und Raum erforderlich. Dieser Wechsel entfaltet und trainiert [...] die Raumvorstellung.«² Insofern genügt das Thema dieser Stunde im besonderen Maße den institutionellen Vorgaben: Die Schülerinnen und Schüler müssen in dieser Stunde quantitative Eigenschaften der Grundkörper erarbeiten, um daraus einen arithmetisch formulierbaren Zusammenhang ableiten zu können.

Innermathematisch besitzt das übergeordnete Thema Grundkörper einen hohen Stellenwert. Liegt in der Unterstufe der Schwerpunkt der Betrachtung noch auf der Form und den geometrischen Eigenschaften, so wird man in einem spiralig angelegten Unterricht die Abstraktionsstufen in der Jahrgangsstufe 8 mit der Berechnung des Oberflächeninhalts und in der Jahrgangsstufe 10 mit der Berechnung des Volumens schrittweise erhöhen.

Die Behandlung geometrischer Grundkörper findet jedoch auch in besonderem Maße außerhalb der Mathematik seine Begründung. Komplexe Figuren und Körper des täglichen Lebens lassen sich vielfach durch die Zusammensetzung geometrischer Grundkörper beschreiben. Kein handwerklicher oder mit dem Handwerk zusammenarbeitender Beruf kommt ohne die Verwendung der Grundkörper aus. Dabei ist die Verwendung einheitlicher Begrifflichkeiten nötig, um Missverständnissen vorzubeugen. Unterschiede zwischen dem alltäglichen Sprachgebrauch und der mathematisch korrekten Definition lassen sich besonders in dieser Unterrichtsreihe aufdecken ("Würfel"-Zucker, Erd-"Kugel", "Kegel"-Spiel, etc.).

Neben der Vertiefung der mathematischen Begrifflichkeiten nimmt die Entdeckung des EULERSCHEN POLYEDERSATZES eine zentrale Stellung im heutigen Unterricht ein. Dabei wird der Schwerpunkt darauf gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler den numerischen Zusammenhang zwischen Flächen-, Kanten- und Eckenanzahlen erkennen und arithmetisch ausdrücken können. Die mathematisch korrekte Formulierung eines entsprechenden Satzes der Form

EULERSCHER POLYEDERSATZ:

Sei E die Anzahl der Ecken, F die Anzahl der Flächen und K die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, dann gilt:

$$E + F = K - 2$$

soll nur ansatzweise geleistet werden. Da die Schüler nur konvexe Polyeder untersuchen, ist eine Unterscheidung in konvexe und konkave Polyeder unnötig. Die Verwendung der Begriffe konvex und konkav würden hier unnötig vom eigentlichen Thema ablenken und das Verständnis erschweren. Auch der mathematische Beweis soll hier nicht geführt werden. Er ist selbst mit den Mitteln der Schulmathematik der Sekundarstufe II nicht leistbar. Vielmehr soll heute die Verifizierung des Satzes an unterschiedlichen – sowohl bekannten als auch unbekannt – Körpern im Vordergrund stehen.

Methodischer Kommentar:

Die Schülerinnen und Schüler werden in dieser Stunde in vielfältiger Weise angeleitet, verschiedene Arbeitsformen und Medien zur Lösungsfindung einzusetzen. Nach einer kurzen Einführung in das Thema im Lehrervortrag und einer Wiederholung der mathematischen Begriffe der letzten Stunde im gelenkten Unterrichtsgespräch bilden die in der vorbereitenden Hausaufgabe angefertigten Modelle der geometrischen Grundkörper die Arbeitsgrundlage der ersten Erarbeitungsphase.

Im Unterrichtsgespräch wird anhand eines Demonstrations-Würfels der Arbeitsauftrag erläutert, unter welchen Gesichtspunkten die geometrischen Grundkörper analysiert werden sollen. Dabei können die Schülerinnen und Schüler die Erläuterungen zeitgleich an ihrem Modell nachvollziehen. Anschließend entwickeln die Schülerinnen und Schüler schrittweise Überlegungen zu Form und Eigenschaften der Körper und verifizieren ihre Feststellungen auf der enaktiven Ebene. Gleichzeitig erhalten die Schülerinnen und Schüler ein Arbeitsblatt, welches zwei Ziele verfolgt: Zum einen können die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse der Arbeitsphase schriftlich festhalten. Zum anderen werden die in der letzten Stunde thematisierten mathematischen Begriffe wiederholend eingefordert. Das Arbeitsblatt ist so gestaltet, dass die Fixierung der Ergebnisse sowohl auf ikonischer als auch auf symbolischer Ebene erfolgen

² Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe I - Gymnasium in Nordrhein-Westfalen; „**Mathematik**“; Hrsg.: Ministerium für Schule und Weiterbildung; Frechen 1993; Seite 52

kann. In der anschließenden Sicherungsphase sollen – falls erforderlich – beide Darstellungsebenen thematisiert werden.

Wie ich bereits bei der Beschreibung der Lerngruppe erläutert habe, möchte ich diese Arbeitsphase in Partnerarbeit durchführen lassen. Einerseits können so Schülerinnen und Schüler, deren zu Hause angefertigten Modelle fehlerhaft sind, trotzdem aktiv an dieser Unterrichtsphase teilnehmen, andererseits erhoffe ich mir durch diese Arbeitsform, dass einige Schülerinnen und Schüler den numerischen Zusammenhang gemeinsam entdecken. Arbeitsgruppen, die besonders schnell fertig sind, werde ich im persönlichen Gespräch anweisen, nach dem numerischen Zusammenhang zu suchen. Sollte die Partnerarbeit an den Gruppentischen durch gegenseitige Unterstützung produktiv in eine Gruppenarbeit münden, so ist dies in meinem Sinne.

In der anschließenden Sicherungsphase werden die Ergebnisse von den Schülerinnen und Schülern auf eine vorbereitete Folie übertragen und im Schülervortrag erläutert. Die letzte Spalte, welche den numerischen Zusammenhang in den Vordergrund der Betrachtung rückt, wird dabei zunächst verdeckt gelassen.

In der zweiten Erarbeitungsphase soll in einem gelenkten Unterrichtsgespräch der Zusammenhang zwischen Ecken-, Flächen- und Kantenanzahl thematisiert werden. Aus meiner unterrichtlichen Erfahrung weiß ich allerdings, dass sich die Schüler oftmals schwer tun, den Zusammenhang ohne Hilfen zu finden. Sollte dies der Fall sein, so wird mit Hilfe der letzten Spalte der zu entdeckende Zusammenhang deutlicher hervorgehoben. Im anderen Fall, dass die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang selbständig ergründen, dient die letzte Spalte der Folie zur Veranschaulichung und Festigung der Vermutung.

Diese soll anschließend von einem Schüler formuliert, an der Tafel fixiert und von den Schülern auf das Arbeitsblatt übertragen werden. Die Formulierung der Vermutung in einem mathematischen Satz dient der Grundlage für die Hausaufgabe, welche darin besteht, den EULERSCHEN POLYEDERSATZ an einem anderen, in dieser Stunde nicht thematisierten Körper, zu überprüfen.

Sollten die Schülerinnen und Schüler wider Erwarten besonders schnell den EULERSCHEN POLYEDERSATZ entdeckt und verifiziert haben, so habe ich verschieden komplexe Polyeder vorbereitet, welche in einer anschließenden Übungsphase in den Gruppen überprüft werden können.

Aus diesen didaktischen und methodischen Überlegungen heraus ergibt sich der Verlauf der Stunde wie folgt:

Synopse:

Phase (Funktion)	Inhalt	Medium	Lehr- / Lernorganisation	Didaktische/Methodische Intention (Kommentar)
Einstieg	Das Thema der Stunde wird vorgestellt	Körper-Modelle	LV	Das Interesse der Schülerinnen und Schüler wird geweckt.
Erarbeitung	Die Begriffe Kante, Ecke und Fläche werden wiederholt; der Arbeitsauftrag wird erläutert.	Würfel-Modell	gel. UG	Die Begriffs-Grundlage wird geschaffen. Missverständnisse können geklärt und behoben werden.
	Die geometrischen Grundkörper werden fachlich richtig bezeichnet.	Arbeitsblatt	EA	Die Schülerinnen und Schüler wiederholen die Begrifflichkeiten der letzten Stunde.
	Die Körper werden bezüglich ihrer Begrenzungsflächen und bezüglich ihrer Ecken-, Flächen- und Kantenanzahlen untersucht.	gebastelte Körper-Modelle Arbeitsblatt	PA	Die Schülerinnen und Schüler wiederholen Begriffe der Unterrichtsreihe Geometrie in der Ebene. Die Grundlage für die Entdeckung des EULERSCHEN POLYEDERSATZES wird hergestellt.
	Der numerische Zusammenhang zwischen den Anzahlen wird analysiert.	Arbeitsblatt	PA / GA	Nur besonders schnelle Schülerinnen und Schüler werden angeleitet, nach dem Zusammenhang zu suchen.
Sicherung	Die Form der Begrenzungsflächen der Körper und die ermittelten Anzahlen werden vorgestellt	Folie evtl. Körper-Modelle	SVe	Die Lösungen sollen sowohl auf ikonischer als auch auf symbolischer Ebene präsentiert werden.
Erarbeitung	Der numerische Zusammenhang zwischen Ecken-, Flächen- und Kantenanzahl wird analysiert.	Folie	gel. UG	Die letzte Spalte der Folie dient entweder zur Erarbeitung oder zur Sicherung des numerischen Zusammenhangs.
Sicherung	Der EULERSCHE POLYEDERSATZ wird formuliert und am Beispiel überprüft.	Tafel / Arbeitsblatt	SV / LV	Die Schüler sollen eine eigene Formulierung, wenn möglich eine mathematische Gleichung aufstellen.
Hausaufgabe:				
Übung	Der EULERSCHE POLYEDERSATZ wird an einem weiteren Körper verifiziert.	alltäglicher Gegenstand (Verpackung, etc.)	EA	Die Schüler überzeugen sich an weiteren Beispielen von der Korrektheit der in der Stunde hergeleiteten Aussage.

Tafelbild:

Innen 1

Innen 2

Innen 3

Innen 4

	<p><u>EULERSCHER POLYEDERSATZ:</u></p> <p>Für die geometrischen Körper gilt:</p> $\text{Anzahl Flächen} + \text{Anzahl Ecken} = \text{Anzahl Kanten} + 2$ <p><u>Beispiel: Tetraeder</u></p>	
--	---	--

Außen 1

Außen 2

--

Ehrenwörtliche Erklärung:

Ich versichere, daß ich die Unterrichtsplanung selbständig verfaßt, daß ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutze und die Stellen der Unterrichtsplanung die ich anderen Werken im Wortlaut oder im Sinn nach entnommen habe, in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Ort, Datum

Unterschrift